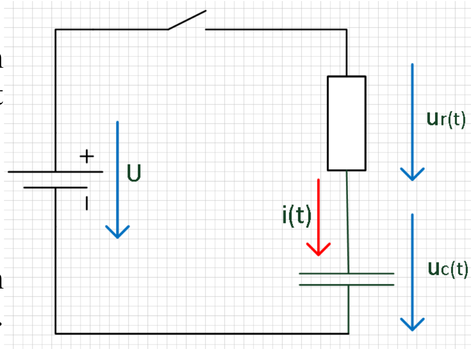
Anwendungsbeispiel zu Exponentialfunktionen: *Ladestrom eines Kondensators*



Beim Ladevorgang eines Kondensators sind Teilspannungen und Strom zeitabhängig. Die Dynamik des Aufladens folgt einfachen Gesetzen.

Eine <u>rekursive Betrachtung</u> liefert folgenden Ansatz:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator ungeladen. Beim Einschalten fällt die volle Quellenspannung am Widerstand ab. Daher fließt in diesem Moment der größte Ladestrom.

t = 0: $u_c(t_0)=0 \qquad u_R(t_0)=U \qquad i(t_0)=\frac{U}{R}$ (i)

Würde der Kondensator mit diesem Strom i_0 weiter geladen, so wäre die maximale Spannung am Kondensator ($u_C = U_0$) erreicht, wenn der Kondensator die Ladung Q_{max} trägt. Diese Ladung ist bauteilabhängig: $Q = U_0 \cdot C$. Würde die Ladung mit i_0 erreicht, so ergäbe sich: $i_0 \cdot t = U_0 \cdot C$. Nach dem Einsetzen der obigen Gleichung (ohmsches Gesetz) und Umstellen nach t ergibt sich: $t = R \cdot C$ die bekannte Zeitkonstante τ. Tatsächlich ändert sich der Strom jedoch ständig, er wird mit zunehmender Spannnung u_C kleiner, da die an R abfallende Spannung kleiner wird. Wir betrachten hier der Einfachheit halber $u_R(t)$, da dort gleich eine Linearität zum Strom i(t) vorliegt. Geht man von einer annähernd konstanten Aufladung während des Zeitschritts Δt aus (Δt muß nur klein genug sein, damit eine akzeptable Genauigkeit gewahrt bleibt):

$t_1 = \Delta t$: $u_R(t_1)=U-\frac{i_0 \cdot \Delta t}{C}$ mit (i) gilt: $u_R(t_1)=U-\frac{U \cdot \Delta t}{RC} \quad = \quad u_R(t_1)=U \cdot (1-\frac{\Delta t}{RC})$ (ii)

Bei einem weiteren Zeitschritt ergibt sich ein Unterschied aus der Tatsache, dass der Kondensator nicht mehr mit i_0 sondern mit i_1 weitergeladen wurde, der kleiner ist, da $u_R(t)$ auf Grund der vorhandenen (kleinen) Ladung von C kleiner ist:

$t_2 = 2\Delta t$: $u_R(t_2)=u_R(t_1)+\frac{i_1 \cdot \Delta t}{C}$ u. $u_R(t_2)=u_R(t_1)-\frac{u_R(t_1) \cdot \Delta t}{RC} \quad = \quad u_R(t_2)=u_R(t_1) \cdot (1-\frac{\Delta t}{RC})$ (iii)

setzen wir in diese Gleichung (iii) $u_R(t_1)$ aus (ii) ein, ergibt sich: $u_R(t_2)=U \cdot (1-\frac{\Delta t}{RC})^2$

Für weitere Zeitschritte erfolgen entsprechende Betrachtungen. Wir nehmen nur die letzte Variante der Formel:

$t_3 = 3\Delta t$: $u_R(t_3)=U \cdot (1-\frac{\Delta t}{RC})^3$ usw … $t_n = n \cdot \Delta t$: $u_R(t_n)=U \cdot (1-\frac{\Delta t}{RC})^n$ (iv)

Die letzte Formel lässt sich ausgezeichnet programmieren. Und mit der einfachen Differenz,
$u_C(t) = U - u_R(t)$ ergibt sich die Kondensatorspannung elementar. Der Prozess kann im Rahmen der Rechenleistung des Computers beliebig fortgesetzt werden. Für kleiner werdende Zeitschritte Δt wird die Berechnung aufwendiger, aber auch genauer. n gibt die Anzahl der Rechenschritte an. Das ist die numerische Lösung der Aufgabe. Für Zwecke der Berechnung mit Papier und Bleistift ungeeignet. Die analytische Lösung ist hier aber zum Greifen nahe.

Wir betrachten Gleichung (iv), setzen $\tau = RC$, $t_n = n \cdot \Delta t$ bzw. $n=\frac{t_n}{\Delta t}$. Ferner machen wir uns klar, dass wir für immer kleiner werdende Δt $t_n = t$ setzen können. Damit ergäbe sich Folgendes:

$u_R(t_n)=u_R(t)=U\cdot(1-\frac{\Delta t}{\tau})^{\frac{t}{\Delta t}}$ Wir substituieren $h=\frac{-\Delta t}{\tau}$ bzw. $\Delta t = -h \cdot \tau$ und erhalten

$u_R(t)=U\cdot(1+h)^{\frac{-t}{h\cdot\tau}}$ = $u_R(t)=U\cdot(1+h)^{\frac{1}{h}\cdot\frac{-t}{\tau}}$ = [Potenzgesetz] $u_R(t)=U\cdot(1+h)^{\frac{1}{h}(\frac{-t}{\tau})}$ (v)

Da wir Δt gedanklich gegen Null gehen ließen, geht auch h gegen Null. Wir untersuchen phänomenologisch, z. B. mit dem Taschenrechner den Ausdruck $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ oder mathematisch ausgerückt $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=x$. Für Immer kleiner werdende h bekommt man als Ergebnis x = e , die Eulersche Zahl.

$u_R(t)=U\cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ Und mit der elementaren Erkenntnis, $u_C(t) = U - u_R(t)$:

$u_C(t)=U-U\cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$ und ausgeklammert $u_C(t)=U\cdot(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$ die bekannte Formel.

Wir haben hiermit die Gültigkeit der Zahl e für die Vorgänge bei Wachstumsfunktionen bewiesen.