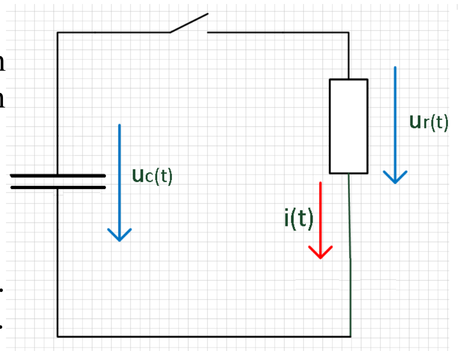
Anwendungsbeispiel zu Exponentialfunktionen: *Entladestrom eines Kondensators*



Beim Entladevorgang eines Kondensators sind Teilspannungen und Strom zeitabhängig. Die Dynamik folgt einfachen Gesetzen.

Eine <u>rekursive Betrachtung</u> liefert folgenden Ansatz:

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Kondensator voll aufgeladen. Beim Einschalten fällt die volle Spannung am Widerstand ab. Daher fließt in diesem Moment der größte Ladestrom.

t = 0: $\quad u_c(t_0)=U \qquad u_R(t_0)=U \qquad i(t_0)=\frac{U}{R}$ (i)

Der Kondensator trägt die Ladung $Q = U_0 \cdot C$, die mit dem Strom i_0 geringer wird. Hält man den Prozess „ganz schnell wieder an, so hätten wir eine neue Bilanz:

entladen, so wäre die maximale Spannung am Kondensator ($u_C = U_0$) erreicht, wenn der Kondensator die Ladung Q_{max} trägt. Diese Ladung ist bauteilabhängig: $Q = U_0 \cdot C$. Würde die Ladung mit i_0 abfließen, so ergäbe sich: $i_0 \cdot t = U_0 \cdot C$. Nach dem Einsetzen der obigen Gleichung (ohmsches Gesetz) und Umstellen nach t ergibt sich: $t = R \cdot C$ die bekannte Zeitkonstante τ. Tatsächlich ändert sich der Strom jedoch ständig, er wird mit geringerer Spannnung u_C kleiner, da die an R abfallende Spannung entsprechend kleiner wird. Geht man von einer annähernd konstanten Entladung während des Zeitschritts Δt aus (Δt muß nur klein genug sein, damit eine akzeptable Genauigkeit gewahrt bleibt):

$t_1 = \Delta t$: $\quad u_C(t_1)=U-\frac{i_0\cdot\Delta t}{C}$ mit (i) gilt: $\quad u_C(t_1)=U-\frac{U\cdot\Delta t}{RC} \quad = \quad u_C(t_1)=U\cdot(1-\frac{\Delta t}{RC})$ (ii)

Bei einem weiteren Zeitschritt ergibt sich ein Unterschied aus der Tatsache, dass der Kondensator nicht mehr mit i_0 sondern mit i_1 weiter entladen würde, der kleiner ist, da $u_R(t)$ auf Grund der vorhandenen (kleineren) Ladung und damit Spannung von C kleiner ist:

$t_2= 2\Delta t$: $\quad u_C(t_2)=u_C(t_1)-\frac{i_1\cdot\Delta t}{C}$ u. $\quad u_C(t_2)=u_C(t_1)-\frac{u_C(t_1)\cdot\Delta t}{RC} \quad = \quad u_C(t_2)=u_C(t_1)\cdot(1-\frac{\Delta t}{RC})$ (iii)

setzen wir in diese Gleichung (iii) $u_C(t_1)$ aus (ii) ein, ergibt sich: $\quad u_C(t_2)=U\cdot(1-\frac{\Delta t}{RC})^2$

Für weitere Zeitschritte erfolgen entsprechende Betrachtungen. Wir nehmen nur die letzte Variante der Formel:

$t_3 = 3\Delta t$: $\quad u_C(t_3)=U\cdot(1-\frac{\Delta t}{RC})^3$ usw … $t_n = n\cdot\Delta t$: $\quad u_C(t_n)=U\cdot(1-\frac{\Delta t}{RC})^n$ (iv)

Die letzte Formel lässt sich ausgezeichnet programmieren. Überhaupt können alle Berechnungen der Zwischenschritte weggelassen werden. Für kleiner werdende Zeitschritte Δt wird die Berechnung aufwendiger, aber auch genauer. n gibt die Anzahl der Rechenschritte an. Das ist die numerische Lösung der Aufgabe. Für Zwecke der Berechnung mit Papier und Bleistift ungeeignet. Die analytische Lösung ist hier aber zum Greifen nahe:

Wir betrachten Gleichung (iv), setzen $\tau = RC$, $t_n = n\cdot\Delta t$ bzw. $n=\frac{t_n}{\Delta t}$. Ferner machen wir uns klar, dass wir für immer kleiner werdende Δt t_n = t setzen können [streng genommen müsste hier eine Grenzwertbetrachtung erfolgen, vgl. weiter unten]. Damit ergäbe sich Folgendes:

$u_C(t_n) = u_C(t) = U \cdot (1 - \frac{\Delta t}{\tau})^{\frac{t}{\Delta t}}$ Wir substituieren $h = \frac{-\Delta t}{\tau}$ bzw. Δt = -h · τ und erhalten

$u_C(t) = U \cdot (1+h)^{\frac{-t}{h \cdot \tau}}$ = $u_C(t) = U \cdot (1+h)^{\frac{1}{h} \cdot \frac{-t}{\tau}}$ = [Potenzgesetz] $u_C(t) = U \cdot [(1+h)^{\frac{1}{h}}]^{\frac{-t}{\tau}}$ (v)

Da wir Δt gedanklich gegen Null gehen ließen, geht auch h gegen Null. Wir untersuchen phänomenologisch, z. B. mit dem Taschenrechner den Ausdruck $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ oder mathematisch ausgerückt $\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = x$. Für immer kleiner werdende *h* bekommt man als Ergebnis x = e , die Eulersche Zahl. Also:

$u_C(t) = U \cdot e^{\frac{-t}{\tau}}$

Wir haben hiermit die Gültigkeit der Zahl e am Beispiel bewiesen.